Homework 4
Exercise 37

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K(s+2)}{s(s+1)+K(s+2)} = \frac{K(s+2)}{s^2+\underbrace{(K+1)}s+\underbrace{2K}}$$

standard form $s^2+\underbrace{2\zeta\omega_n}s+\omega_n^2$

$$\omega_n=\sqrt{2K},\quad \zeta=\frac{K+1}{2\sqrt{2K}}$$

$$P.O. = 100e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$70 = 100e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$0.07 = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\ln 0.07 = \ln e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$(-2.66)^2=\left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)^2$$

$$7.08 = \frac{9.86\zeta^2}{1-\zeta^2}$$

$$1-\zeta^2 = 1.39\zeta^2$$

$$\therefore \zeta = 0.588$$

$$\zeta = \frac{K+1}{2\sqrt{2K}}$$

$$0.588 = \frac{K+1}{2\sqrt{2K}}$$

$$\therefore K = 1.5$$

Exercise 38

(a) Closed-loop Transfer function

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{s+1}{s(s+3)}}{1+K\frac{s+1}{s(s+3)}} = \frac{s+1}{s(s+3)+K(s+1)} = \frac{s+1}{s^2+s(K+3)+K}$$

#

(b) $e_{ss} = ?$ when $R(s) = \frac{1}{s^2}$

$$E(s) = R(s) - Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{s+1}{s^2+s(K+3)+K}\cdot\frac{1}{s^2}$$

$$= \frac{1}{s^2}\cdot\left(1 - \frac{s+1}{s^2+s(K+3)+K}\right)$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s\,E(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\cdot\frac{1}{s^{\cancel{2}}}\cdot\left(1 - \frac{s+1}{s^2+s(K+3)+K}\right)$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\left(\frac{s^2+s(K+3)+K-s-1}{s^2+s(K+3)+K}\right)$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\left(\frac{s^2+s(K+2)+K-1}{s^2+s(K+3)+K}\right)$$

if $K = 1$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{\cancel{s}}\left(\frac{\cancel{s}(s+3)}{s^2+4s+1}\right)$$

$$\boxed{e_{ss} = 3}$$

#

if $K \neq 1$

$$\boxed{e_{ss} = \infty}$$

#

Exercise 39

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{s(s+20)}}{1+s\cdot\frac{K}{s(s+20)}} = \frac{K}{s(s+20)+Ks} = \frac{K}{s^2+(20+K)s}$$

$K=20$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{20}{s(s+40)}$$

สังเกตว่า เป็น 1st order system ดังนั้นจะพิจารณาแบบ 2nd order ไม่ได้

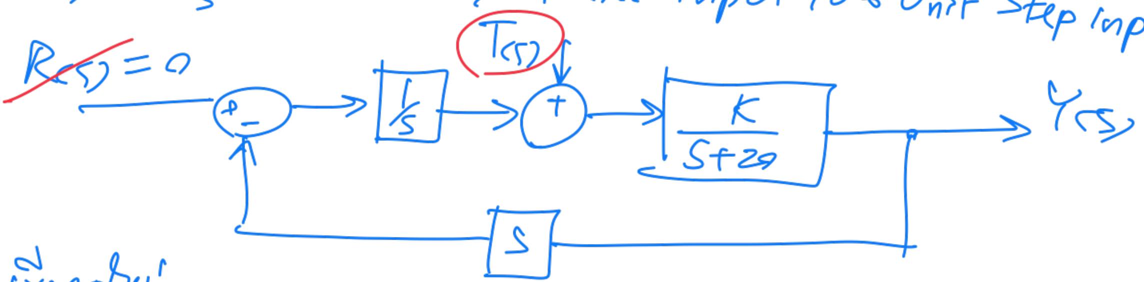
เขียนใหม่

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{20}{40s\left(\frac{1}{40}s+1\right)}$$

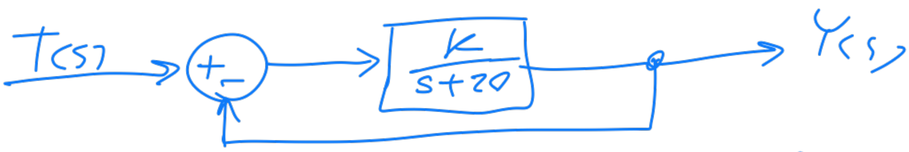
คือ Time constant ของ 1st order system

→ (a) time constant, $\tau = \frac{1}{40}$ วินาที #

(b) T_s within 2% เมื่อให้ Input เป็น Unit step input



เขียนใหม่



$$\frac{Y(s)}{T(s)} = \frac{\frac{K}{s+20}}{1+\frac{K}{s+20}} = \frac{K}{s+20+K} = \frac{20}{s+40}$$

$K=20$

$T(s) = \frac{1}{s}$, Unit step input $\therefore Y(s) = \frac{20}{s+40}\cdot\frac{1}{s}$

Not 2^{nd} Order system จะใช้ทฤษฎีการของ 2^{nd} order มาใช้วิเคราะห์ไม่ได้ เพราะคนละระบบ

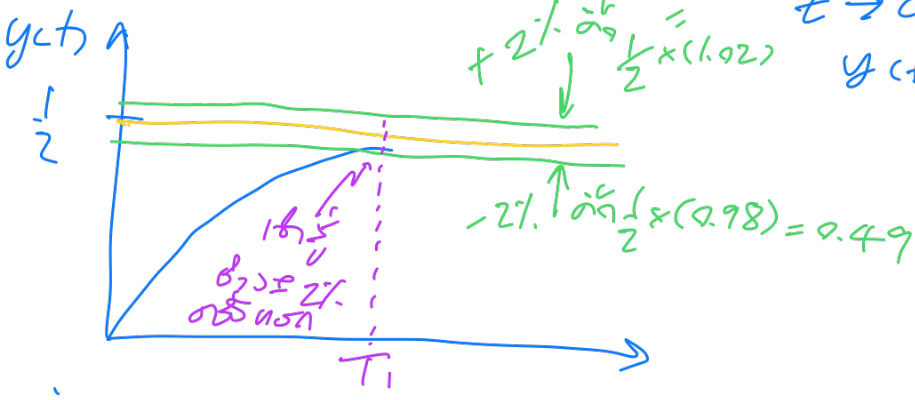
ระบบนี้เป็น 1^{st} Order system

ทำ เอาเวลาจากการตอบสนองที่ว่า ค่าสุดท้ายของผลลัพธ์ จะเข้ามาสู่ช่วง ±2% (Final Value lay with ±2% boundary)
โดยหาผลตอบ $y(t)$ ก่อน จะได้

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{20}{s+40}\cdot\frac{1}{s}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\underbrace{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+40} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}}_{\text{ทำ Partial Fraction}}\right]$$

ดังนั้นได้

$$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-40t} = \frac{1}{2}(1-e^{-40t}) \quad ※$$



$t \to \infty$ $y(t) = \frac{1}{2}$

Final Value

เริ่มต้นที่เวลา T_1, $y(t)$ จะมีค่าเท่ากับ 0.49

หา T_1 ได้ $y(t=T_1) = \frac{1}{2}(1-e^{-40T_1}) = 0.49$

$$e^{-40T_1} = 1-(0.49)(2)$$

$$\ln e^{-40T_1} = \ln(0.02) = -3.91$$

$$-40T_1 = -3.91 \implies \boxed{T_1 = 0.098 \text{ วินาที}} \quad ※$$